Prof. Dr. Alfred Toth

Ordnung und Deixis bei Peanozahlen

1. Die Folge der Peanozahlen

$P = (0, 1, 2, ..., n).$

enthält eine zunächst implizite Ordnung, die derjenigen der Abfolge der Elemente von P entspricht. Das bedeutet, daß etwa $P^* = (1, 3, 0, ..., n)$ nicht isomorph mit P ist, und hieraus folgt, daß P eine geordnete Menge darstellt. Festgelegt wird sie durch die Axiome der Vorgänger- und Nachfolgerschaft in den bekannten fünf Peano-Axiomen

1. $0 \in \mathbb{N}$
2. $\forall n (n \in \mathbb{N} \Rightarrow n' \in \mathbb{N})$
3. $\forall n (n \in \mathbb{N} \Rightarrow n' \neq 0)$
4. $\forall n, m (m, n \in \mathbb{N} \Rightarrow (m' = n' \Rightarrow m = n))$
5. $\forall X (0 \in X \wedge \forall n (n \in \mathbb{N} \Rightarrow (n \in X \Rightarrow n' \in X)) \Rightarrow \mathbb{N} \subseteq X)$,

d.h. man könnte P auch ordnungstheoretisch wie folgt notieren

$P = (0 < 1 < 2 < ... < n).$

Mit dem Satz von Wiener und Kuratowski (1914) ist es daher möglich, Mengen wie P als geordnete Mengen von Paaren zu notieren, so daß wir bekommen

$\mathfrak{O} = (X, Y, <).$

2. Nun hatten wir in Toth (2018a) die deiktischen Peanozahlen eingeführt. Dies hat sich als sehr fruchtbar erwiesen, da bekanntlich die von Bense (1981, S. 17 ff.) als „Primzeichen" eingeführten Peirce-Zahlen (vgl. Toth 2010) eine Teilmenge der Peanozahlen sind. Bewiesen wurde dies bereits durch Bense (vgl. Bense 1975, S. 167 ff.). Vor allem aber ist es dadurch möglich, die Ordnungsstruktur $\mathfrak{O}$ in der Form von rein relationalen indizierten Paaren zu notieren (vgl. Toth 2018b)

$R = (X_i, Y_j)$

mit

$i \leftrightarrow j \; (i, j \in (1 ... (n+1))),$

d.h. man kann Peanozahlen auch in der Form

$P_i = (0_1, 1_2, 2_3, ..., n_{n+1})$

notieren.

3. Es stellt sich jedoch die Frage der Isomorphie von P und P_i. Ersetzt die Indizierung wirklich die Ordnung? Die Antwort auf diese Frage hängt davon ab, wie die einzelnen Peanozahlen interpretiert werden, und hier gibt es zwei Möglichkeiten.

3.1. Man definiert

$n = \Sigma(0, n\text{-}1)$,

d.h. jede Zahl wird als Menge eingeführt, so daß etwa

$3 = (0, 1, 2)$

gilt. Verfährt man auf diese Weise, gibt es aber bereits bei N(3) Probleme, denn es ist

$4 \neq (0, 1, 2, 3)$,

sondern

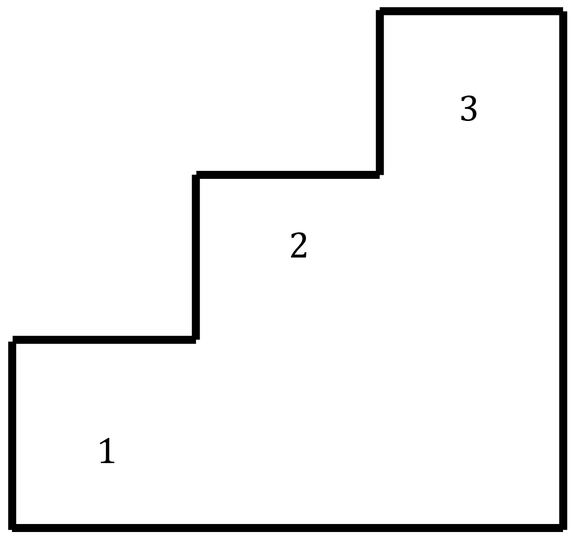
$4 = (0, 1, 1, 2)$

Schließlich ist die Abbildung der mengentheoretischen Teilengen von P nicht bijektiv zu P, wie bereits in 4 deutlich wird. Theoretisch kann man sogar jede Peanozahl als Summe von Einsen ausdrücken.

Immerhin aber werden vermöge Bense (1979, S. 53, 67) die Peircezahlen kategorietheoretisch durch

$Z = ((1 \rightarrow ((1 \rightarrow 2) \rightarrow (1, 2, 3)))$

definiert. Man kann dies durch ein Venn-Diagramm wie folgt darstellen



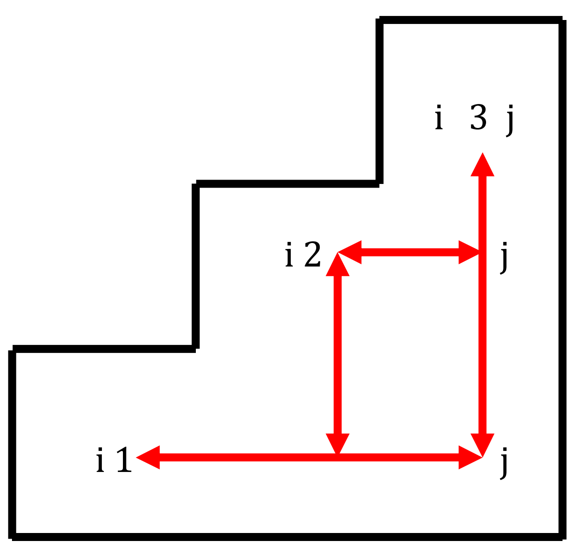
3.2. Die in der Mathematik übliche Definition faßt jedoch Zahlen nicht als Mengen auf, d.h. man geht statt von

$Z = ((1 \rightarrow ((1 \rightarrow 2) \rightarrow (1, 2, 3)))$

aus von

$P = (1 \rightarrow 2 \rightarrow 3)$.

Im Falle von 3.2. koinzidieren, wie man leicht sieht, tatsächlich Ordnungsrelation und Indizierung, aber im Falle von 3.1. ist das nicht der Fall, denn hier haben wir



Formal ausgedrückt, liegt also in 3.1. die Definition

$P = (0 < 1 < 2 < ... < n)$

vor, in 3.2. dagegen die Definition

$P_i = (0_1 < 1_2 < 2_3 < ... < n_{n+1})$.

Für 3.1. haben wir die Ordnungsstruktur

$\mathfrak{O} = (X, Y, <)$,

wogegen wir für 3.2. die Ordnungsstruktur

$\mathfrak{O} = (X, Y, <, i, j)$,

also eine geordnete indizierte Menge, haben.

Literatur

Bense, Max, Semiotische Prozesse und Systeme. Baden-Baden 1975

Bense, Max, Axiomatik und Semiotik. Baden-Baden 1981

Toth, Alfred, Calculus semioticus: Was zählt die Semiotik? In: Electronic Journal of Mathematical Semiotics, 2010

Toth, Alfred, Deiktische Peanozahlen. In: Electronic Journal for Mathematical Semiotics, 2018a

Toth, Alfred, Deiktische Peircezahlen. In: Electronic Journal for Mathematical Semiotics, 2018b

Wiener, Norbert, A simplification of the logic of relations. In: Proceedings of the Cambridge Philosophical Society 17, 1914, S. 387-390

21.8.2018